BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК 517.958

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОМЕРНОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

А.Р.АЛИЕВ*,, Э.Х.ЭЙВАЗОВ***

Бакинский Государственный Университет,

*****Институт Математики и Механики НАН Азербайджана***

alievaraz@yahoo.com, eyvazovelshad@mail.ru

В работе доказывается самосопряженность рассматриваемого на всей оси одномерного магнитного оператора Шредингера при определенных условиях на его магнитный и электрический потенциалы. Кроме того, устанавливается, что у этого оператора отсутствуют положительные собственные значения и положительная полуось является его двукратным непрерывным спектром.

Ключевые слова: *оператор Шредингера, магнитный потенциал, электрический потенциал, самосопряженный оператор, непрерывный спектр.*

Рассмотрим в пространстве $L_2(R_1)$ ($R_1 = (-\infty, +\infty)$) одномерный магнитный оператор Шредингера

$$\Delta_{a,V} = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + a(x)\right)^2 + V(x), \tag{1}$$

где $a(x)$ и $V(x)$ – магнитный и электрический потенциалы, соответственно, причем эти потенциалы – вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$a)$ $a^2(x) + V(x) \in L_1(R_1)$; $b)$ $a(x) \in L_1(R_1)$; $c)$ $a'(x) \in L_1(R_1)$.

Такой оператор встречается при изучении одномерного движения частицы (волны) во внешнем электрическом и магнитном поле.

В данной работе изучим минимальный оператор $H_{a,V}$, порожденный сингулярным квазидифференциальным выражением (1) (теория квазидифференциальных операторов подробно изложена в работах [1; гл. V], [2; гл. IV, V], [3]).

Обозначим $\widetilde{D}_{a,V}$ совокупность всех финитных локально абсолютно непрерывных функций $y^{[0]} := y(x)$ из $L_2(R_1)$, квазипроизводные первого порядка $y^{[1]} := y' + ia(x)y$ которых абсолютно непрерывны, а квазипроизводная $y^{[2]} := \left(y^{[1]}\right)' - V(x)y^{[0]} + ia(x)y^{[1]}$ принадлежит пространству $L_2(R_1)$. Определим оператор $\widetilde{H}_{a,V}$ в $L_2(R_1)$ следующим образом: область определения оператора $\widetilde{H}_{a,V}$ есть $\widetilde{D}_{a,V}$ и для $y \in \widetilde{D}_{a,V}$

$$\widetilde{H}_{a,V}\, y = -y^{[2]} = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + a(x)\right)^2 y + V(x)y .$$

Замыкание оператора $\widetilde{H}_{a,V}$ обозначим через $H_{a,V}$.

Теорема 1. *В условиях a), b), c) оператор* $H_{a,V}$ *самосопряжен в* $L_2(R_1)$.

Доказательство. Пусть $H^-_{a,V}$ и $H^+_{a,V}$ – операторы $H_{a,V}$, порожденные тем же дифференциальным выражением (1) на промежутках $(-\infty,0]$ и $[0,+\infty)$, соответственно. Очевидно, что $H^-_{a,V}$ и $H^+_{a,V}$ будут уже операторы с одним сингулярным концом $x = -\infty$ и $x = +\infty$, соответственно. Из условий *b*), *c*) и локально абсолютной непрерывности квазипроизводных первого порядка $y^{[1]} := y' + ia(x)y$ следует, что $y'(x)$ – локально абсолютно непрерывная функция. Поэтому уравнение

$$\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + a(x)\right)^2 y + V(x)y = \lambda^2 y \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0) \qquad (2)$$

можно представить в следующем виде:

$$- y'' - 2ia(x)y' + \left[a^2(x) + V(x) - ia'(x)\right]y = \lambda^2 y ,$$

где производные y' и y'' понимаются в смысле обобщенных функций. Из условий *a*), *b*), *c*) вытекает, что $a^2(x) + V(x) - ia'(x) \in L_1(R_1)$. Используя [1; гл. VII, параграф 22, пункт 2, замечание к теореме 7], получаем, что индексы дефекта обоих операторов $H^-_{a,V}$ и $H^+_{a,V}$ является $(1,1)$. Из теории расщепления (см., например, [1]) следует, что в случае интервала $(-\infty,+\infty)$ индекс дефекта оператора $H_{a,V}$ есть $(0,0)$, т.е. оператор $H_{a,V}$ самосопряжен в $L_2(R_1)$. Теорема доказана.

Замечание. *Из условий a), b), c) вытекает, что* $C_0^\infty(R_1)$ *является существенной областью определения оператора* $H_{a,V}$. *Оператор* $H_{a,V}$ *можно рассмотреть как самосопряженный оператор, порожденный квадратичной формой*

$$h_{a,V}(u,u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left|u'(x)+ia(x)\right|^2+V(x)\left|u(x)\right|^2\right)dx.$$

Отметим, что в работе [4] исследовано существенная самосопряженность многомерного магнитного оператора Шредингера.

Теперь изучим некоторые спектральные свойства оператора $H_{a,V}$.

Теорема 2. *При условиях a), b), c) для оператора* $H_{a,V}$ *положительная полуось является двукратным непрерывным спектром и у него на интервале* $(0,+\infty)$ *отсутствуют собственные значения.*

Доказательство. Известно (см., например, [1; гл. V], [3]), что решение уравнения (2) равносильно решению системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\psi'(x)=\begin{pmatrix}-ia(x) & 1\\ V(x)-\lambda^2 & -ia(x)\end{pmatrix}\psi(x), \tag{3}$$

где

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}y^{[0]}\\ y^{[1]}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(x)\\ y'+ia(x)y(x)\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\varphi_+(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e^{i\lambda x}\\ i\lambda e^{i\lambda x}+ia(x)e^{i\lambda x}\end{pmatrix},\quad \varphi_-(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e^{-i\lambda x}\\ -i\lambda e^{-i\lambda x}+ia(x)e^{-i\lambda x}\end{pmatrix}$$

и

$$q(x)=\begin{pmatrix}\alpha(x)\\ \beta(x)\end{pmatrix},$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – произвольные функции. Покажем, что если решение системы (3) искать в виде

$$\psi(x)=\alpha(x)\varphi_+(x,\lambda)+\beta(x)\varphi_-(x,\lambda), \tag{4}$$

то $q(x)$ будет решением системы

$$q'(x)=D(x)q(x), \tag{5}$$

где

$$D(x)=\frac{1}{2i\lambda}\begin{pmatrix}a^2(x)+V(x)-ia'(x)+2\lambda a(x) & \left(a^2(x)+V(x)-ia'(x)-2\lambda a(x)\right)e^{-2i\lambda x}\\ -\left(a^2(x)+V(x)-ia'(x)+2\lambda a(x)\right)e^{2i\lambda x} & -\left(a^2(x)+V(x)-ia'(x)-2\lambda a(x)\right)\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Действительно, если положим

$$C(x,\lambda)=\begin{pmatrix}-ia(x) & 1\\ V(x)-\lambda^2 & -ia(x)\end{pmatrix}$$

и

$$K(x,\lambda)=\begin{pmatrix} e^{i\lambda x} & e^{-i\lambda x} \\ i(\lambda+a(x))e^{i\lambda x} & i(-\lambda+a(x))e^{-i\lambda x} \end{pmatrix},$$

то системы (3) и (4) можно написать в матричном виде

$$\psi'(x)=C(x,\lambda)\psi(x), \tag{7}$$

и

$$\psi(x)=K(x,\lambda)q(x), \tag{8}$$

соответственно. Так как при $\lambda\neq 0$, $\det K(x,\lambda)=-2i\lambda\neq 0$, то из системы (8) можно найти $q(x)$:

$$q(x)=M(x,\lambda)\psi(x), \tag{9}$$

где

$$M(x,\lambda)=K^{-1}(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\begin{pmatrix} i(\lambda-a(x))e^{-i\lambda x} & e^{-i\lambda x} \\ i(\lambda+a(x))e^{i\lambda x} & -e^{i\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Из систем (7)-(9) имеем

$$q'(x)=M'(x,\lambda)\psi(x)+M(x,\lambda)\psi'(x)=[M'(x,\lambda)+M(x,\lambda)C(x,\lambda)]K(x,\lambda)q(x).$$

Обозначим через $D(x)=[M'(x,\lambda)+M(x,\lambda)C(x,\lambda)]K(x,\lambda)$. Вычисление показывает, что

$$M'(x,\lambda)+M(x,\lambda)C(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\begin{pmatrix} (-ia'(x)-a^2(x)+V(x))e^{-i\lambda x} & -2ia(x)e^{-i\lambda x} \\ (ia'(x)+a^2(x)-V(x))e^{i\lambda x} & 2ia(x)e^{i\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Отсюда же становится ясно, что матрица $D(x)$ имеет вид (6) и $q(x)$ является решением системы (5).

Так как при условиях *a*), *b*), *c*) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|C(x,\lambda)\|dx<+\infty$, то система (3) имеет решение (см. [5; теорема XI.65]) асимптотически сходящееся к любому двумерному вектору q_0 при $x\to\infty$. Выбирая $q^+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $q^-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, находим, что уравнение (2) при $\lambda^2>0$ имеет два линейно независимых решения $\varphi_\pm(x,\lambda)$, удовлетворяющие условию излучения:

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left|\varphi_\pm(x,\lambda)-e^{\pm i\lambda x}\right|+\left|\varphi'_\pm(x,\lambda)-[\pm i\lambda+ia(x)]e^{\pm i\lambda x}\right|\right\}=0. \tag{10}$$

Из условия излучения (10) вытекает, что при $\lambda\in R_1\setminus\{0\}$ уравнение (2) не имеет ненулевых квадратично интегрируемых решений, а это означает, что у оператора $H_{a,V}$ отсутствуют положительные собственные значения. С другой стороны, линейно независимые функции $\varphi_\pm(x,\lambda)$ при $\lambda^2>0$ являются непрерывными и ограниченными решениями уравнения

(2). Следовательно, положительная полуось является двукратным непрерывным спектром оператора $H_{a,V}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1969, 528 с.
2. Everitt W.N., Marcus L. Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. Math. Surveys Monogr., **61**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 187 p.
3. Долгих И.Н., Мирзоев К.А. Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов // Математический сборник, 2006, т. 197, № 4, с. 53-74.
4. Алиев А.Р., Эйвазов Э.Х. О существенной самосопряженности оператора Шредингера в магнитном поле // Теоретическая и математическая физика, 2011, т. 166, № 2, с. 266-271.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Т.3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982, 443 с.

BİRÖLÇÜLÜ MAQNİT ŞRÖDİNGER OPERATORUNUN BƏZİ SPEKTRAL XASSƏLƏRİ HAQQINDA

A.R.ƏLİYEV, E.H.EYVAZOV

XÜLASƏ

İşdə bütün oxda baxılan birölçülü maqnit Şrödinger operatorunun, onun maqnit və elektrik potensialları üzərinə qoyulan müəyyən şərtlər daxilində, öz-özünə qoşmalığı isbat edilir. Bundan başqa göstərilir ki, bu operatorun müsbət məxsusi ədədləri yoxdur və müsbət yarımox onun ikiqat kəsilməz spektridir.

Açar sözlər: Şrödinger operator, maqnit potensial, elektrik potensial, öz-özünə qoşma operator, kəsilməz spektr.

ON SOME SPECTRAL PROPERTIES OF ONE-DIMENSIONAL MAGNETIC SCHRÖDINGER OPERATOR

A.R.ALIEV, E.H.EYVAZOV

SUMMARY

In this paper, under certain conditions on the magnetic and electric potentials, self-adjointness of one-dimensional magnetic Schrödinger operator on the whole axis is proved. Moreover, it is established that this operator has no positive eigenvalues and the positive semi-axis is its double continuous spectrum.

Key words: Schrödinger operator, magnetic potential, electric potential, self-adjoint operator, continuous spectrum.

Поступила в редакцию: 11.03.2011
Принято к печати: 17.06.2011